

误差对同轴六分支分扭人字齿轮传动系统 静均载性能影响

李志宾, 王三民, 李 飞, 李林林, 彭麒安, 王为康
(西北工业大学 机电学院, 西安 710072)

摘 要: 以同轴六分支分扭人字齿轮传动系统为研究对象,依据各齿轮受力状态建立该系统的静力平衡方程。考虑到制造误差和安装误差及输入输出轮浮动导致的错位,基于当量啮合误差理论,分析误差的存在性,最后根据系统功率闭环特征建立系统变形协调方程,形成了同轴六分支人字齿轮传动系统静均载分析方法,并结合实例求出系统各齿轮之间静均载系数及分支静均载系数。研究表明:在无误差或各齿轮误差均相同为常值时,第Ⅰ级各齿轮静态啮合力为 1.773×10^5 N,第Ⅱ级各齿轮静态啮合力为 3.673×10^5 N,系统具有很好静均载性能,系统分支静均载系数为 1,该系统构成功率闭环误差可相互抵消;制造和安装误差幅值同时作用为 $50 \mu\text{m}$ 时,求得制造误差下分支静均载系数变化幅度比安装误差下分支静均载系数要大,可知制造误差对系统静均载性能影响程度要大;分扭和并车误差幅值同时作用为 $50 \mu\text{m}$ 时,并车级比分扭级静均载性能更容易受误差的影响,因此输出构件应该有浮动量。综上所述,随制造或安装误差增大或减少,都会对系统静均载性能造成不良的影响,其研究成果可为同轴减速器传动系统制造误差和安装误差精度确定,均载系数确定提供科学依据。

关 键 词: 制造与安装误差; 同轴六分支; 人字齿轮传动系统; 静均载性能; 变形协调
中图分类号: V232.8 **文献标志码:** A

Influence of error on static load-sharing performance of coaxial six-branch twist herringbone gear transmission system

LI Zhibin, WANG Sanmin, LI Fei, LI Linlin, PENG Qi'an, WANG Weikang
(School of Mechanical Engineering,
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The static equilibrium equation of the system is fulfilled based on the stress state of each gear with coaxial six-branch twisted herringbone gear transmission system as the research object. Considering the manufacturing error, installation error and dislocation caused by input and output wheel floating, the existence of error is analyzed based on the theory of equivalent meshing error. The system deformation coordination equation is established according to the closed characteristics of system power. The static load coefficient and branch static load coefficient of coaxial six-branch herringbone gear transmission system are obtained by examples. The results showed that when there was no error or the gear error was the same constant value, the static meshing force of the first grade gear was 1.773×10^5 N and the second grade gear was 3.673×10^5 N. The system has good static load-sharing performance and the system branch static load-sharing

收稿日期:2020-10-12

作者简介:李志宾(1991—),男,博士生,主要从事齿轮传动系统非线性振动。

引用格式:李志宾,王三民,李飞,等. 误差对同轴六分支分扭人字齿轮传动系统静均载性能影响[J]. 航空动力学报,2021,36(8): 1765-1775. LI Zhibin, WANG Sanmin, LI Fei, et al. Influence of error on static load-sharing performance of coaxial six-branch twist herringbone gear transmission system[J]. Journal of Aerospace Power, 2021, 36(8): 1765-1775.

coefficient was 1, and the closed loop error of the system can be eliminated from each other. When the amplitude of manufacturing and installation error was $50\text{ }\mu\text{m}$ at the same time, the variation amplitude of branch static load coefficient under manufacturing error was larger than that under installation error, and it can be seen that the manufacturing error had a great influence on the static load performance of the system. When the amplitude of partial torsion and parallel error was $50\text{ }\mu\text{m}$ at the same time, the static load-sharing performance of parallel level at the two-stage transmission system was more easily affected by the error than the torsion level, so the output member should have a floating amount. To sum up, with the increase or decrease of the system error, it would have a bad effect on the static load-sharing performance of the system. The research results can provide scientific basis for the determination of manufacturing error and installation error accuracy of coaxial reducer transmission system and the determination of average load coefficient.

Key words: manufacturing and installation errors; coaxial six-branch; herringbone gear transmission system; static load-sharing performance; compatibility of deformation

同轴六分支人字齿轮传动系统广泛应用于大型船舶动力传输系统中,其特点是输入轴和输出轴位于同一轴线上,具有功率分路传递、结构对称紧凑、传动比大、承载能力大、可靠性高等优点。但分扭齿轮传动轮系属于过约束运动机构,受各构件制造误差、安装误差和构件变形等影响,导致系统齿轮轮齿间载荷分配不均,影响传动系统使用寿命、传递平稳性和工作可靠性,因此进行同轴人字齿轮传动均载特性的研究具有重要意义。

均载特性可从静力学和动力学两方面进行分析,但对船舶这种低速大功率齿轮传动机构来说,在设计阶段进行静均载分析尤为重要,不仅为结构设计时强度计算提供载荷不均系数,也为后期动均载分析奠定基础。Kahraman^[1-2]对行星齿轮传动系统进行静力学实验,得到齿形误差和位置度误差影响下的静载均载系数。Krantz^[3]对功率两分支传动系统的静态均载问题进行研究,分析制造和安装误差影响下的静均载特性。White^[4]对功率分流齿轮系统构型进行设计,通过发动机布局得出最后一级减速最大,可大大减小系统质量,提高传递效率。Yuriy^[5]对功率分流齿轮传动系统的弹性轴对系统均载特性进行研究,得到扭转刚度影响下的静均载系数。Wink等^[6]研究了齿面载荷均匀分配的求解方法。Singh^[7]建立行星传动均载特性分析模型,分析制造误差影响下均载特性。陆俊华等^[8]从动力学角度建立 2K-H 型行星传动系统的计算模型,分析各构件制造和安装误差,分析系统的动态均载特性和各误差参数变化对系统均载特性的影响。朱增宝等^[9]建

立了采用中间浮动构件的封闭差动人字齿轮传动系统静力学模,通过计算载荷不均匀系数,获得了齿轮偏心误差、安装误差与载荷不均匀系数间的关系曲线,进而分析偏心与安装误差对传动系统均载特性的影响。杜进辅等^[10]从静力学角度分析构件的制造误差、安装误差及浮动构件对行星传动均载性能的影响。董皓等^[11-12]从静力学角度分析构件的安装误差和均载特性的关系,并分析间隙浮动对均载特性的影响。桂永方等^[13]建立圆柱齿轮分流传动系统的弯扭耦合动力学模型,利用齿轮啮合线的相对位移和传动轴扭转移消除刚体位移,获得系统静均载系数。靳广虎等^[14]研究了扭转刚度对功率分流传动系统均载特性的影响。通过以上分析可知,现有研究多为转矩列出静力学方程并且未充分考虑各齿轮的角度位移一致协调问题,系统误差考虑也不全面,且同轴输入输出齿轮系统功率流动闭环特征也少有涉及。对于复杂功率多分流闭环系统构件误差影响下的均载机理少之又少^[15]。本文首先建立系统的静力平衡方程,考虑齿轮制造(偏心、齿厚、基节)误差和安装误差以及输入输出轮浮动导致的相对错位,基于当量啮合误差理论以及系统功率闭环特征建立系统变形协调方程,形成了同轴六分支分扭人字齿轮传动系统静均载特性分析方法。采用该方法求解不同误差下的静均载系数,为某船舶传动系统的设计提供了支撑。

1 系统静力平衡方程

图 1 为同轴六分支人字齿轮传动系统示意

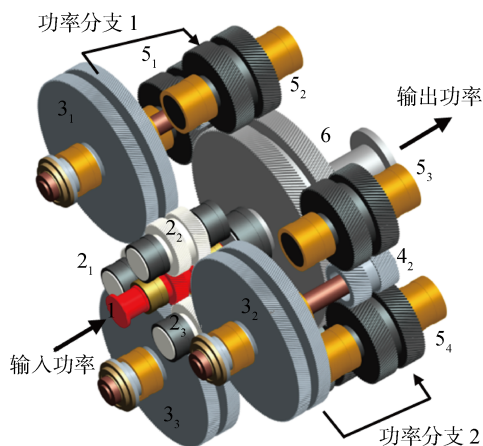


图 1 同轴六分支人字齿轮传动系统示意图

Fig.1 Sketch of coaxial six-branch herringbone gear transmission system

图,该系统输入功率由第 I 级小齿轮 1 输入,再经三个分扭齿轮 $2_1, 2_2, 2_3$ 实现三支功率分流,每个分支分别带动齿轮 $3_1, 3_2, 3_3$,通过均载扭力轴分别带动第 II 级小齿轮 $4_1, 4_2, 4_3$,经小齿轮 $4_1, 4_2, 4_3$ 分别对每分支功率再进行两分支,从而实现功率六分支传递,最后经齿轮 $5_1, 5_2, 5_3, 5_4, 5_5, 5_6$ 实现功率合并经大齿轮 6 输出。该系统能够实现大功率、大减速比、大扭矩传动,广泛应用于舰船和航空等动力传输系统。

图 2 为同轴六分支人字齿轮传动系统静力学

模型,将每个人字齿轮简化成刚性圆盘,各齿轮处靠轴承支承,将齿轮啮合副及支承处的弹性变形等效成弹簧变形。系统输入转速为 n_1 ,输入转矩为 T_1 。 F_{ij} 表示齿轮 j 对齿轮 i 的静态啮合作用力。 r_{bi} 表示齿轮 i 的基圆半径。其中 $i=1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 3_2, 3_3, 4_1, 4_2, 4_3, 5_1, 5_2, 5_3, 5_4, 5_5, 5_6, 6$; $j=2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 3_2, 3_3, 5_1, 5_2, 5_3, 5_4, 5_5, 5_6, 6$; F_{ij} 下标 i 表示主动齿轮, j 表示从动齿轮, F_{ij} 沿啮合线方向,规定沿啮合线压缩方向为正,远离方向为负。文中 1 级下标表示齿轮, 2 级下标表示同级齿轮个数,全文采用此方式表示参数。

齿轮 1 的力平衡方程

$$T_1 + F_{12_1} \cdot r_{b1} + F_{12_2} \cdot r_{b1} + F_{12_3} \cdot r_{b1} = 0 \quad (1)$$

齿轮 2_1 、齿轮 2_2 、齿轮 2_3 的力平衡方程

$$\begin{aligned} -F_{12_1} \cdot r_{b2_1} + F_{2_1 3_1} \cdot r_{b2_1} &= 0 \\ -F_{12_2} \cdot r_{b2_2} + F_{2_2 3_2} \cdot r_{b2_2} &= 0 \\ -F_{12_3} \cdot r_{b2_3} + F_{2_3 3_3} \cdot r_{b2_3} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

双联齿轮 3_1-4_1 、双联齿轮 3_2-4_2 、双联齿轮 3_3-4_3 的力平衡方程

$$\begin{aligned} -F_{2_1 3_1} \cdot r_{b3_1} + F_{4_1 5_1} \cdot r_{b3_1} + F_{4_1 5_2} \cdot r_{b3_1} &= 0 \\ -F_{2_2 3_2} \cdot r_{b3_2} + F_{4_2 5_3} \cdot r_{b3_2} + F_{4_2 5_4} \cdot r_{b3_2} &= 0 \\ -F_{2_3 3_3} \cdot r_{b3_3} + F_{4_3 5_5} \cdot r_{b3_3} + F_{4_3 5_6} \cdot r_{b3_3} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

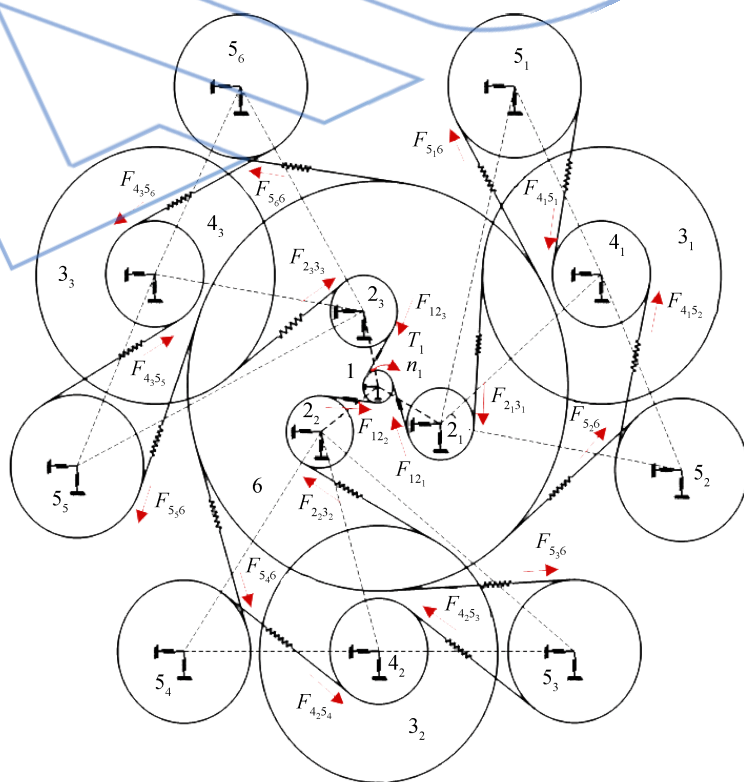


图 2 同轴六分支人字齿轮传动系统静力学模型

Fig.2 Static model of coaxial six-branch herringbone gear transmission system

齿轮 5_1 、齿轮 5_2 的力平衡方程

$$\begin{aligned} -F_{4_1 5_1} \cdot r_{b5_1} + F_{5_1 6} \cdot r_{b5_1} &= 0 \\ -F_{4_1 5_2} \cdot r_{b5_2} + F_{5_2 6} \cdot r_{b5_2} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

齿轮 5_3 、齿轮 5_4 的力平衡方程

$$\begin{aligned} -F_{4_2 5_3} \cdot r_{b5_3} + F_{5_3 6} \cdot r_{b5_3} &= 0 \\ -F_{4_2 5_4} \cdot r_{b5_4} + F_{5_4 6} \cdot r_{b5_4} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

齿轮 5_5 、齿轮 5_6 的力平衡方程

$$\begin{aligned} -F_{4_3 5_5} \cdot r_{b5_5} + F_{5_5 6} \cdot r_{b5_5} &= 0 \\ -F_{4_3 5_6} \cdot r_{b5_6} + F_{5_6 6} \cdot r_{b5_6} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $r_{b2_1} = r_{b2_2} = r_{b2_3} = r_{b2}, r_{b3_1} = r_{b3_2} = r_{b3_3} = r_{b3}$
 $r_{b4_1} = r_{b4_2} = r_{b4_3} = r_{b4}, r_{b5_1} = r_{b5_2} = r_{b5_3} = r_{b5_4} = r_{b5_5} = r_{b5_6} = r_{b5}$

则由式(4)、式(5)、式(6)可得

$$\begin{aligned} F_{4_1 5_1} + F_{4_1 5_2} + F_{4_2 5_3} + F_{4_2 5_4} + F_{4_3 5_5} + F_{4_3 5_6} &= \\ F_{5_1 6} + F_{5_2 6} + F_{5_3 6} + F_{5_4 6} + F_{5_5 6} + F_{5_6 6} \end{aligned} \quad (7)$$

由式(3)可得

$$\begin{aligned} (F_{2_1 3_1} + F_{2_2 3_2} + F_{2_3 3_3}) \cdot r_{b3} &= \\ (F_{4_1 5_1} + F_{4_1 5_2} + F_{4_2 5_3} + F_{4_2 5_4} + F_{4_3 5_5} + F_{4_3 5_6}) \cdot r_{b4} \end{aligned} \quad (8)$$

由式(7)和式(8)可得

$$\begin{aligned} (F_{2_1 3_1} + F_{2_2 3_2} + F_{2_3 3_3}) \cdot r_{b3} &= \\ (F_{5_1 6} + F_{5_2 6} + F_{5_3 6} + F_{5_4 6} + F_{5_5 6} + F_{5_6 6}) \cdot r_{b4} \end{aligned} \quad (9)$$

由式(2)可得

$$\begin{aligned} F_{12_1} &= F_{2_1 3_1} \\ F_{12_2} &= F_{2_2 3_2} \\ F_{12_3} &= F_{2_3 3_3} \end{aligned} \quad (10)$$

将式(9)和式(10)带入式(1)中,最终可得

$$\frac{T_1}{r_{b1}} + \frac{(F_{5_1 6} + F_{5_2 6} + F_{5_3 6} + F_{5_4 6} + F_{5_5 6} + F_{5_6 6}) \cdot r_{b4}}{r_{b3}} = 0 \quad (11)$$

2 啮合传动误差分析

2.1 制造误差和安装误差引起的当量角度啮合误差

对齿轮传动系统中的制造和安装误差沿啮合线上等效为有一定长度误差幅值的当量啮合误差并叠加得到综合角度啮合误差。在齿轮传动过程中,除了输出齿轮外,其余各个齿轮制造误差与啮合线方向的夹角为时变量,而各个齿轮的安装误差与啮合线方向的夹角为常量。第Ⅰ级中齿轮1、齿轮 2_1 、 2_2 、 2_3 和 3_1 、 3_2 、 3_3 之间的制造误差和安装误差如图3所示;第Ⅱ级齿轮 4_1 、 4_2 、 4_3 、齿轮 5_1 、 5_2 、 5_3 、 5_4 、 5_5 、 5_6 和齿轮6之间的制造误差和安装误差如图4所示;图中 O 为各齿轮的理论中心位置, O_1 为各齿轮实际中心位置,两点间距即为误差幅值。 E_i 表示齿轮 i 制造误差(偏心、齿厚、基节), A_i 表示齿轮 i 安装误差, β_i 表示齿轮 i 制造误差方向(与 x 轴正向夹角), γ_i 表示齿轮 i 安装误差方向(与 x 轴正向夹角), ω_i 表示齿轮 i 的角速度。 α_{ij} 表示齿轮 i 与齿轮 j 相啮合压力角, ψ_{ij} 表示齿轮 j 相对于齿轮 i 的位置角。 t 表示时间。定义当量啮合误差离开啮合线的方向为正,齿轮1逆时针方向转动。

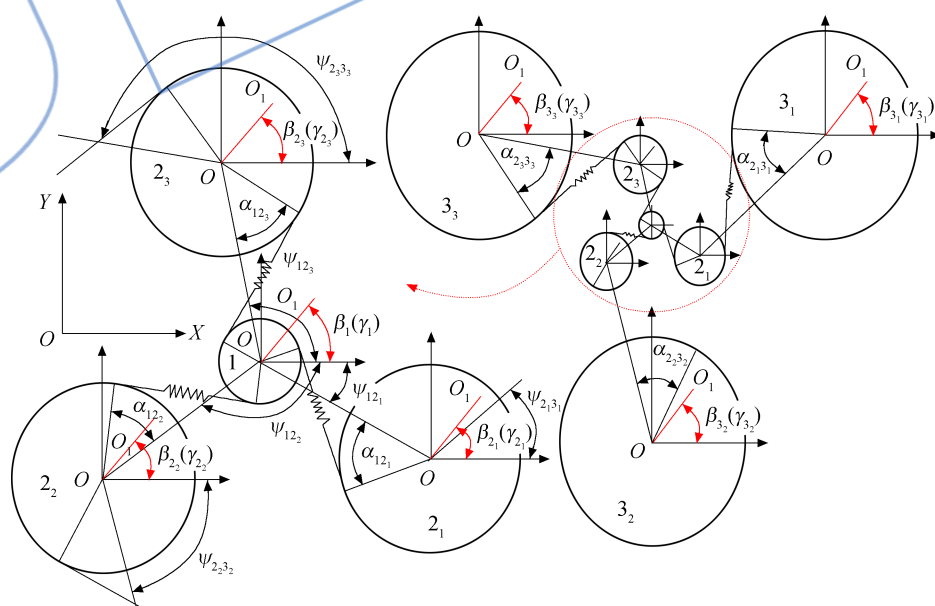


图3 第Ⅰ级各齿轮误差示意图

Fig.3 Schematic illustration of gear errors at level I

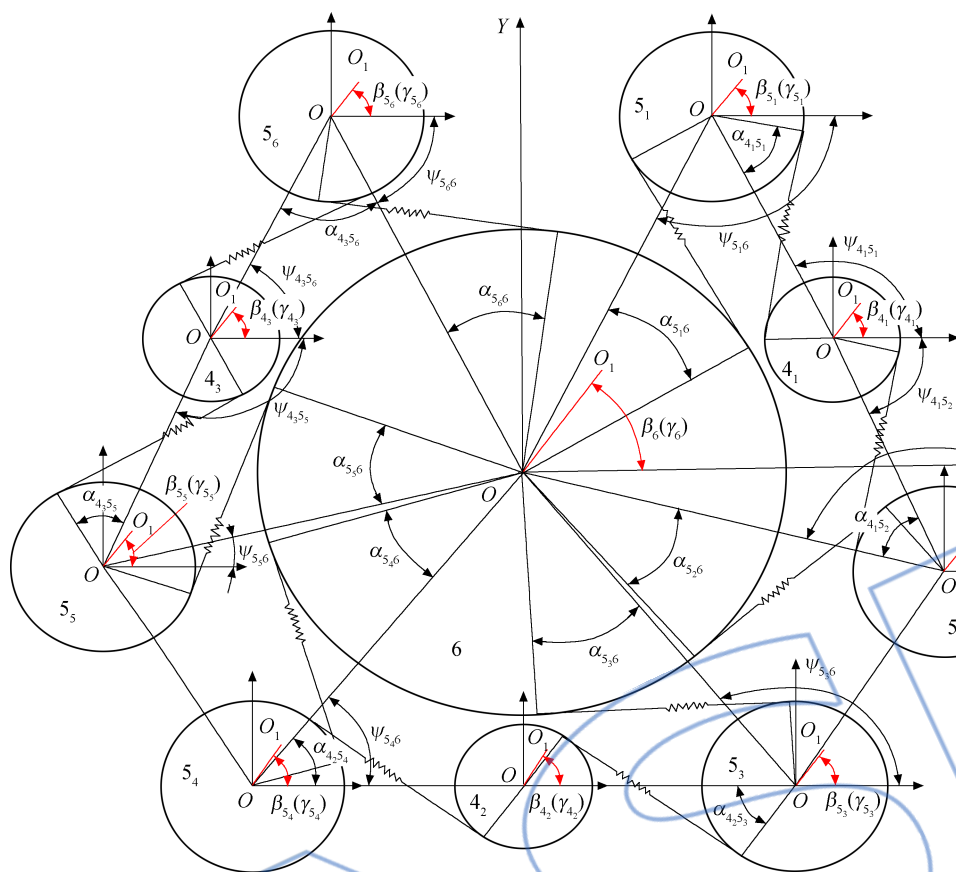


图4 第Ⅱ级各齿轮误差示意图

Fig.4 Schematic illustration of gear errors at level II

齿轮 i 偏心误差 E_{ri} 及其轴承制造误差 E_{bi} 沿齿轮 i 和齿轮 j 啮合线方向的当量角度啮合误差分别为 φ_{Erij} , φ_{Ebij} , 其表达式为

$$\begin{cases} \varphi_{Erij} = -E_{ri} \sin(\omega_i t + \beta_i + \alpha_{ij} - \psi_{ij})/r_i \\ \varphi_{Ebij} = -E_{bi} \sin(\omega_i t + \beta_i + \alpha_{ij} - \psi_{ij})/r_i \end{cases} \quad (12)$$

齿轮 j 偏心误差 E_{rj} 及其轴承制造误差 E_{bj} 沿齿轮 j 和齿轮 i 啮合线方向的当量角度啮合误差分别为 φ_{Erji} , φ_{Ebji} , 其表达式为

$$\begin{cases} \varphi_{Erji} = E_{rj} \sin(-\omega_j t + \beta_j + \alpha_{ij} - \psi_{ij})/r_j \\ \varphi_{Ebji} = E_{bj} \sin(-\omega_j t + \beta_j + \alpha_{ij} - \psi_{ij})/r_j \end{cases} \quad (13)$$

齿轮 i 基节误差 E_{bpi} 和齿厚误差 E_{tpi} 沿相互啮合的齿轮之间啮合线方向的当量角度啮合误差分别为 φ_{Ebp_i} 和 φ_{Etp_i} , 其表达式为

$$\begin{cases} \varphi_{Ebp_i} = -E_{bpi}/r_i \\ \varphi_{Etp_i} = -E_{tpi}/r_i \end{cases} \quad (14)$$

齿轮 i 安装误差 A_{ri} 沿齿轮 i 和齿轮 j 啮合线方向的当量角度啮合误差分别为 φ_{Arij} , 其表达式为

$$\varphi_{Arij} = -A_{ri} \sin(\beta_i + \alpha_{ij} - \psi_{ij})/r_i \quad (15)$$

齿轮 j 安装误差 A_{rj} 沿齿轮 j 和齿轮 i 啮合线方向的当量角度啮合误差分别为 φ_{Arji} , 其表达式为

$$\varphi_{Arji} = A_{rj} \sin(\beta_j + \alpha_{ij} - \psi_{ij})/r_j \quad (16)$$

其中 $i=1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6$; $j=1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6$ 。

2.2 齿侧间隙当量角度啮合误差

该齿轮传动系统输入齿轮 1 和输出齿轮 6 采用浮动构件, 可以在一定程度消除各支路之间受载不均匀。 x_1 、 y_1 和 x_6 、 y_6 分别为齿轮 1 和齿轮 6 的中心在 x 和 y 方向浮动位移量, Δ_{ij} 表示由浮动构件位移引起的齿侧间隙改变量, ν_{ij} 表示齿轮 j 相对于齿轮 i 啮合线方向角。则有如下公式成立:

$$\begin{cases} \Delta_{12_1} = -(x_1 \cos \nu_{12_1} + y_1 \sin \nu_{12_1}) r_{b1} \\ \Delta_{12_2} = -(x_1 \cos \nu_{12_2} + y_1 \sin \nu_{12_2}) r_{b1} \\ \Delta_{12_3} = -(x_1 \cos \nu_{12_3} + y_1 \sin \nu_{12_3}) r_{b1} \\ \Delta_{5_1 6} = -(x_6 \cos \nu_{5_1 6} + y_6 \sin \nu_{5_1 6}) r_{b6} \\ \Delta_{5_2 6} = -(x_6 \cos \nu_{5_2 6} + y_6 \sin \nu_{5_2 6}) r_{b6} \\ \Delta_{5_3 6} = -(x_6 \cos \nu_{5_3 6} + y_6 \sin \nu_{5_3 6}) r_{b6} \\ \Delta_{5_4 6} = -(x_6 \cos \nu_{5_4 6} + y_6 \sin \nu_{5_4 6}) r_{b6} \\ \Delta_{5_5 6} = -(x_6 \cos \nu_{5_5 6} + y_6 \sin \nu_{5_5 6}) r_{b6} \\ \Delta_{5_6 6} = -(x_6 \cos \nu_{5_6 6} + y_6 \sin \nu_{5_6 6}) r_{b6} \end{cases} \quad (17)$$

2.3 齿轮传动系统综合角度啮合误差

将齿轮制造误差(偏心、齿厚、基节)、轴承误差、安装误差及齿侧间隙误差等误差值分别等效

为沿啮合线上的当量角度啮合误差,然后将当量角度啮合误差分别叠加,可得构件之间的综合角度啮合误差,其表达式如下:

$$\begin{cases}
 e_{12_1} = \varphi_{Er12_1} + \varphi_{Eb12_1} + \varphi_{Er2_1} + \varphi_{Eb2_1} + \varphi_{Ebp1} + \varphi_{Ebp2_1} + \varphi_{Etp1} + \varphi_{Etp2_1} + \varphi_{Ar12_1} + \varphi_{Ar2_1} + \Delta_{12_1} \\
 e_{12_2} = \varphi_{Er12_2} + \varphi_{Eb12_2} + \varphi_{Er2_2} + \varphi_{Eb2_2} + \varphi_{Ebp1} + \varphi_{Ebp2_2} + \varphi_{Etp1} + \varphi_{Etp2_2} + \varphi_{Ar12_2} + \varphi_{Ar2_2} + \Delta_{12_2} \\
 e_{12_3} = \varphi_{Er12_3} + \varphi_{Eb12_3} + \varphi_{Er2_3} + \varphi_{Eb2_3} + \varphi_{Ebp1} + \varphi_{Ebp2_3} + \varphi_{Etp1} + \varphi_{Etp2_3} + \varphi_{Ar12_3} + \varphi_{Ar2_3} + \Delta_{12_3} \\
 e_{2_13_1} = \varphi_{Er2_13_1} + \varphi_{Eb2_13_1} + \varphi_{Er3_12_1} + \varphi_{Eb3_12_1} + \varphi_{Ebp2_1} + \varphi_{Ebp3_1} + \varphi_{Etp2_1} + \varphi_{Etp3_1} + \varphi_{Ar2_13_1} + \varphi_{Ar3_12_1} \\
 e_{2_23_2} = \varphi_{Er2_23_2} + \varphi_{Eb2_23_2} + \varphi_{Er3_22_2} + \varphi_{Eb3_22_2} + \varphi_{Ebp2_2} + \varphi_{Ebp3_2} + \varphi_{Etp2_2} + \varphi_{Etp3_2} + \varphi_{Ar2_23_2} + \varphi_{Ar3_22_2} \\
 e_{2_33_3} = \varphi_{Er2_33_3} + \varphi_{Eb2_33_3} + \varphi_{Er3_32_3} + \varphi_{Eb3_32_3} + \varphi_{Ebp2_3} + \varphi_{Ebp3_3} + \varphi_{Etp2_3} + \varphi_{Etp3_3} + \varphi_{Ar2_33_3} + \varphi_{Ar3_32_3} \\
 e_{4_15_1} = \varphi_{Er4_15_1} + \varphi_{Eb4_15_1} + \varphi_{Er5_4_1} + \varphi_{Eb5_4_1} + \varphi_{Ebp5_1} + \varphi_{Ebp4_1} + \varphi_{Etp5_1} + \varphi_{Etp4_1} + \varphi_{Ar4_15_1} + \varphi_{Ar5_4_1} \\
 e_{4_15_2} = \varphi_{Er4_15_2} + \varphi_{Eb4_15_2} + \varphi_{Er5_4_1} + \varphi_{Eb5_4_1} + \varphi_{Ebp5_2} + \varphi_{Ebp4_1} + \varphi_{Etp5_2} + \varphi_{Etp4_1} + \varphi_{Ar4_15_2} + \varphi_{Ar5_4_1} \\
 e_{4_25_3} = \varphi_{Er4_25_3} + \varphi_{Eb4_25_3} + \varphi_{Er5_4_2} + \varphi_{Eb5_4_2} + \varphi_{Ebp5_3} + \varphi_{Ebp4_2} + \varphi_{Etp5_3} + \varphi_{Etp4_2} + \varphi_{Ar4_25_3} + \varphi_{Ar5_4_2} \\
 e_{4_25_4} = \varphi_{Er4_25_4} + \varphi_{Eb4_25_4} + \varphi_{Er5_4_2} + \varphi_{Eb5_4_2} + \varphi_{Ebp5_4} + \varphi_{Ebp4_2} + \varphi_{Etp5_4} + \varphi_{Etp4_2} + \varphi_{Ar4_25_4} + \varphi_{Ar5_4_2} \\
 e_{4_35_5} = \varphi_{Er4_35_5} + \varphi_{Eb4_35_5} + \varphi_{Er5_4_3} + \varphi_{Eb5_4_3} + \varphi_{Ebp5_5} + \varphi_{Ebp4_3} + \varphi_{Etp5_5} + \varphi_{Etp4_3} + \varphi_{Ar4_35_5} + \varphi_{Ar5_4_3} \\
 e_{4_35_6} = \varphi_{Er4_35_6} + \varphi_{Eb4_35_6} + \varphi_{Er5_4_3} + \varphi_{Eb5_4_3} + \varphi_{Ebp5_6} + \varphi_{Ebp4_3} + \varphi_{Etp5_6} + \varphi_{Etp4_3} + \varphi_{Ar4_35_6} + \varphi_{Ar5_4_3} \\
 e_{5_16} = \varphi_{Er5_16} + \varphi_{Eb5_16} + \varphi_{Er65_1} + \varphi_{Eb65_1} + \varphi_{Ebp5_1} + \varphi_{Ebp6} + \varphi_{Etp5_1} + \varphi_{Etp6} + \varphi_{Ar5_16} + \varphi_{Ar65_1} + \Delta_{5_16} \\
 e_{5_26} = \varphi_{Er5_26} + \varphi_{Eb5_26} + \varphi_{Er65_2} + \varphi_{Eb65_2} + \varphi_{Ebp5_2} + \varphi_{Ebp6} + \varphi_{Etp5_2} + \varphi_{Etp6} + \varphi_{Ar5_26} + \varphi_{Ar65_2} + \Delta_{5_26} \\
 e_{5_36} = \varphi_{Er5_36} + \varphi_{Eb5_36} + \varphi_{Er65_3} + \varphi_{Eb65_3} + \varphi_{Ebp5_3} + \varphi_{Ebp6} + \varphi_{Etp5_3} + \varphi_{Etp6} + \varphi_{Ar5_36} + \varphi_{Ar65_3} + \Delta_{5_36} \\
 e_{5_46} = \varphi_{Er5_46} + \varphi_{Eb5_46} + \varphi_{Er65_4} + \varphi_{Eb65_4} + \varphi_{Ebp5_4} + \varphi_{Ebp6} + \varphi_{Etp5_4} + \varphi_{Etp6} + \varphi_{Ar5_46} + \varphi_{Ar65_4} + \Delta_{5_46} \\
 e_{5_56} = \varphi_{Er5_56} + \varphi_{Eb5_56} + \varphi_{Er65_5} + \varphi_{Eb65_5} + \varphi_{Ebp5_5} + \varphi_{Ebp6} + \varphi_{Etp5_5} + \varphi_{Etp6} + \varphi_{Ar5_56} + \varphi_{Ar65_5} + \Delta_{5_56} \\
 e_{5_66} = \varphi_{Er5_66} + \varphi_{Eb5_66} + \varphi_{Er65_6} + \varphi_{Eb65_6} + \varphi_{Ebp5_6} + \varphi_{Ebp6} + \varphi_{Etp5_6} + \varphi_{Etp6} + \varphi_{Ar5_66} + \varphi_{Ar65_6} + \Delta_{5_66}
 \end{cases} \quad (18)$$

3 系统变形协调方程

图5为传动系统各支路变形关系图。图中 k_{ij} 表示齿轮*i*与齿轮*j*之间的平均啮合刚度, e_{ij} 表示齿轮*i*与齿轮*j*之间的综合啮合误差。 k_1 、 k_2 、 k_3 分别表示两级之间传递扭矩的均载扭力轴扭转刚度。传动系统每一分支中从齿轮1到齿轮6都会

存在一个传动误差。 i_{kj} 表示齿轮*k*与齿轮*j*之间的传动比。 $\Delta\varphi_6^k$ ($k=1,2,3,4,5,6$)表示齿轮传动系统各分支路中各齿轮相对啮合点的转角微位移变形等效到各分支路上输出齿轮6的相对转角误差,其中上标*k*表示功率传递支路数。各支路等效角度啮合误差如下:

第1支路

$$\Delta\varphi_6^1 = \frac{e_{12_1}}{r_{b2_1} i_{2_13_1} i_{4_15_1} i_{5_16}} + \frac{F_{12_1}}{k_{12_1} r_{b2_1} i_{2_13_1} i_{4_15_1} i_{5_16}} + \frac{e_{2_13_1}}{r_{b3_1} i_{4_15_1} i_{5_16}} + \frac{F_{2_13_1}}{k_{2_13_1} r_{b3_1} i_{4_15_1} i_{5_16}} + \frac{F_{2_13_1} \cdot r_{b3_1}}{k_1 i_{4_15_1} i_{5_16}} + \frac{e_{4_15_1}}{r_{b5_1} i_{5_16}} + \frac{F_{4_15_1}}{k_{4_15_1} r_{b5_1} i_{5_16}} + \frac{e_{5_16}}{r_{b6}} + \frac{F_{5_16}}{k_{5_16} r_{b6}} \quad (19)$$

第2支路

$$\Delta\varphi_6^2 = \frac{e_{12_2}}{r_{b2_2} i_{2_23_2} i_{4_25_2} i_{5_26}} + \frac{F_{12_2}}{k_{12_2} r_{b2_2} i_{2_23_2} i_{4_25_2} i_{5_26}} + \frac{e_{2_23_2}}{r_{b3_2} i_{4_25_2} i_{5_26}} + \frac{F_{2_23_2}}{k_{2_23_2} r_{b3_2} i_{4_25_2} i_{5_26}} + \frac{F_{2_23_2} \cdot r_{b3_2}}{k_1 i_{4_25_2} i_{5_26}} + \frac{e_{4_25_2}}{r_{b5_2} i_{5_26}} + \frac{F_{4_25_2}}{k_{4_25_2} r_{b5_2} i_{5_26}} + \frac{e_{5_26}}{r_{b6}} + \frac{F_{5_26}}{k_{5_26} r_{b6}} \quad (20)$$

第3支路

$$\Delta\varphi_6^3 = \frac{e_{12_3}}{r_{b2_3} i_{2_33_3} i_{4_35_3} i_{5_36}} + \frac{F_{12_3}}{k_{12_3} r_{b2_3} i_{2_33_3} i_{4_35_3} i_{5_36}} + \frac{e_{2_33_3}}{r_{b3_3} i_{4_35_3} i_{5_36}} + \frac{F_{2_33_3}}{k_{2_33_3} r_{b3_3} i_{4_35_3} i_{5_36}} + \frac{F_{2_33_3} \cdot r_{b3_3}}{k_2 i_{4_35_3} i_{5_36}} + \frac{e_{4_35_3}}{r_{b5_3} i_{5_36}} + \frac{F_{4_35_3}}{k_{4_35_3} r_{b5_3} i_{5_36}} + \frac{e_{5_36}}{r_{b6}} + \frac{F_{5_36}}{k_{5_36} r_{b6}} \quad (21)$$

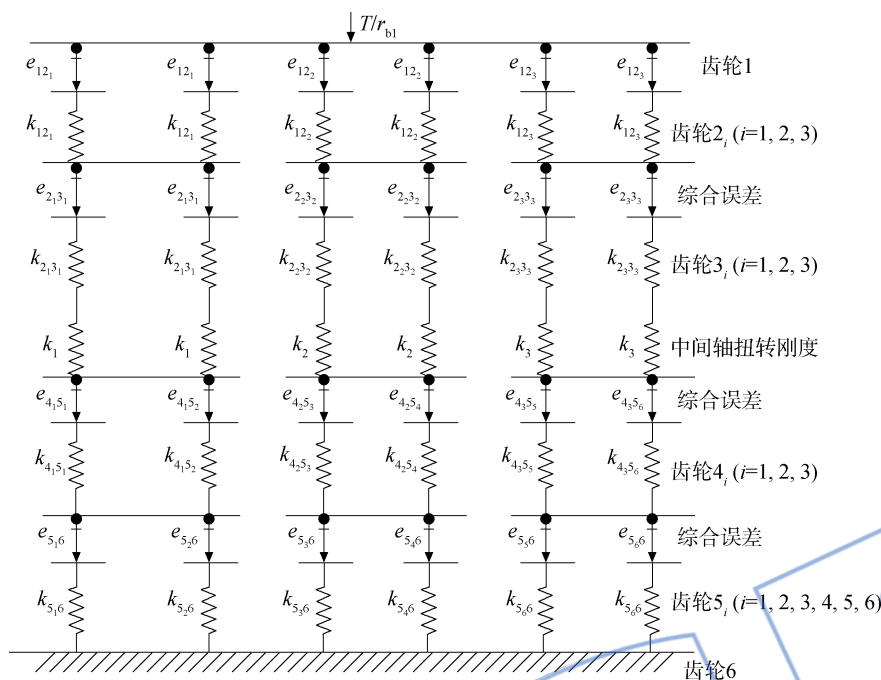


图5 传动系统各支路变形关系图

Fig.5 Deformation relationship diagram of each branch of transmission system

第 4 支路

$$\Delta\varphi_6^4 = \frac{e_{12_1}}{r_{b2_1} i_{2_1 3_1} i_{4_1 5_1} i_{5_1 6}} + \frac{F_{12_1}}{k_{12_1} r_{b2_1} i_{2_1 3_1} i_{4_1 5_1} i_{5_1 6}} + \frac{e_{2_1 3_1}}{r_{b3_1} i_{4_1 5_1} i_{5_1 6}} + \frac{F_{2_1 3_1}}{k_{2_1 3_1} r_{b3_1} i_{4_1 5_1} i_{5_1 6}} + \frac{F_{2_1 3_1} \cdot r_{b3_1}}{k_{2_1 3_1} i_{4_1 5_1} i_{5_1 6}} + \frac{e_{4_1 5_1}}{r_{b5_1} i_{5_1 6}} + \frac{F_{4_1 5_1}}{k_{4_1 5_1} r_{b5_1} i_{5_1 6}} + \frac{e_{5_1 6}}{r_{b6}} + \frac{F_{5_1 6}}{k_{5_1 6} r_{b6}} \quad (22)$$

第 5 支路

$$\Delta\varphi_6^5 = \frac{e_{12_2}}{r_{b2_2} i_{2_2 3_2} i_{4_2 5_2} i_{5_2 6}} + \frac{F_{12_2}}{k_{12_2} r_{b2_2} i_{2_2 3_2} i_{4_2 5_2} i_{5_2 6}} + \frac{e_{2_2 3_2}}{r_{b3_2} i_{4_2 5_2} i_{5_2 6}} + \frac{F_{2_2 3_2}}{k_{2_2 3_2} r_{b3_2} i_{4_2 5_2} i_{5_2 6}} + \frac{F_{2_2 3_2} \cdot r_{b3_2}}{k_{2_2 3_2} i_{4_2 5_2} i_{5_2 6}} + \frac{e_{4_2 5_2}}{r_{b5_2} i_{5_2 6}} + \frac{F_{4_2 5_2}}{k_{4_2 5_2} r_{b5_2} i_{5_2 6}} + \frac{e_{5_2 6}}{r_{b6}} + \frac{F_{5_2 6}}{k_{5_2 6} r_{b6}} \quad (23)$$

第 6 支路

$$\Delta\varphi_6^6 = \frac{e_{12_3}}{r_{b2_3} i_{2_3 3_3} i_{4_3 5_3} i_{5_3 6}} + \frac{F_{12_3}}{k_{12_3} r_{b2_3} i_{2_3 3_3} i_{4_3 5_3} i_{5_3 6}} + \frac{e_{2_3 3_3}}{r_{b3_3} i_{4_3 5_3} i_{5_3 6}} + \frac{F_{2_3 3_3}}{k_{2_3 3_3} r_{b3_3} i_{4_3 5_3} i_{5_3 6}} + \frac{F_{2_3 3_3} \cdot r_{b3_3}}{k_{2_3 3_3} i_{4_3 5_3} i_{5_3 6}} + \frac{e_{4_3 5_3}}{r_{b5_3} i_{5_3 6}} + \frac{F_{4_3 5_3}}{k_{4_3 5_3} r_{b5_3} i_{5_3 6}} + \frac{e_{5_3 6}}{r_{b6}} + \frac{F_{5_3 6}}{k_{5_3 6} r_{b6}} \quad (24)$$

分别组成独立的功率流动闭环系统,构件之间的误差相互叠加或抵消,得系统的变形协调条件

$$\Delta\varphi_6^1 = \Delta\varphi_6^2 = \Delta\varphi_6^3 = \Delta\varphi_6^4 = \Delta\varphi_6^5 = \Delta\varphi_6^6 \quad (25)$$

由式(25)可得各支路的静态啮合力,进而可求得静均载系数。

4 静均载系数分析

针对同轴六分支齿轮传动系统,定义静态啮合力与名义啮合力的比值为静均载系数 k_{sij} 即^[16]

$$k_{sij} = \frac{F_{ij}}{(T_{ij}/r_{bi})} \quad (26)$$

其中 F_{ij} 表示式(26)求得的齿轮 i 和齿轮 j 之间的静态啮合力, T_{ij} 表示通过输入力矩 T_1 与传动比 i_{kj} 确定的两齿轮之间的名义静态啮合力, k_{sij} 表示齿轮 i 与齿轮 j 之间啮合分支的静均载系数, T_i 表示齿轮 i 所受转矩。

为了便于叙述,定义 $k_{s1} \sim k_{s18}$ 分别代替 k_{s12_1} 、 k_{s12_2} 、 k_{s12_3} 、 $k_{s2_1 3_1}$ 、 $k_{s2_2 3_2}$ 、 $k_{s2_3 3_3}$ 、 $k_{s4_1 5_1}$ 、 $k_{s4_2 5_2}$ 、 $k_{s4_3 5_3}$ 、 $k_{s4_4 5_4}$ 、 $k_{s4_5 5_5}$ 、 $k_{s5_1 6}$ 、 $k_{s5_2 6}$ 、 $k_{s5_3 6}$ 、 $k_{s5_4 6}$ 、 $k_{s5_5 6}$ 、 $k_{s5_6 6}$, 定义这 18

个分支依次为分支1~分支18。

$$\begin{cases} T_1 = T_{in} \\ T_{2_1} = T_{2_2} = T_{2_3} = T_{in} r_{b2}/3r_{b1} \\ T_{3_1} = T_{3_2} = T_{3_3} = T_{2_1} r_{b3}/r_{b2} \\ T_{4_1} = T_{4_2} = T_{4_3} = T_{3_1} \\ T_{5_1} = T_{5_2} = T_{5_3} = T_{5_4} = T_{5_5} = T_{5_6} = T_{4_1} r_{b5}/2r_{b4} \end{cases} \quad (27)$$

结合式(27)可得各静载系数满足

$$\begin{cases} k_{s1} = k_{s2} = k_{s3} \\ k_{s4} = k_{s5} = k_{s6} \\ k_{s7} = k_{s8} = k_{s9} = k_{s10} = k_{s11} = k_{s12} \\ k_{s13} = k_{s14} = k_{s15} = k_{s16} = k_{s17} = k_{s18} \end{cases} \quad (28)$$

由此可得,研究传动系统各分支静均载性能,只需研究 k_{s1} 、 k_{s4} 、 k_{s7} 、 k_{s13} 。

为了更加直观描述该齿轮系统静均载性能的好坏,定义传递分支静均载系数^[17-18]

$$K_{sk} =$$

$$\begin{cases} \min(k_{sij}) & |\min(k_{sij}) - 1| > |\max(k_{sij}) - 1| \\ \max(k_{sij}) & |\min(k_{sij}) - 1| < |\max(k_{sij}) - 1| \end{cases} \quad (29)$$

式中 K_{sk} 表示分支 k 静均载系数, $k=1,2,3,4,5,6$ 。由以上表达式可知,在齿轮传动系统中任一齿轮之间啮合分支,其静均载系数为时变量,而传递分支静均载系数为常量,说明齿轮传动系统每一分支静均载系数越接近1则该分支均载特性越好,越远离1则该分支静均载特性越坏。

5 算例

5.1 系统参数

某船用同轴六分支人字齿轮传动系统基本参数如表1。

表1 六分支人字齿轮传动系统基本参数

Table 1 Basic parameters of six-branch herringbone gear transmission system

齿轮($i=1,2,3$)	法面模数 m_n/mm	齿数 Z	螺旋角 $\beta/(\circ)$	法面压力角 $\alpha_n/(\circ)$	齿宽 b/mm
1 _i	6	52	28	20	332
2 _i	6	70	28	20	332
3 _i	6	221	28	20	332
4 _i	8	44	29	20	460
5 _{IL}	8	84	29	20	460
5 _{IR}	8	84	29	20	460
6 _i	8	207	29	20	460

输入转速 $n=4\,000\text{ r/min}$,输入功率 $P=30\,000\text{ kW}$,两级之间扭转轴刚度 $k_1=k_2=k_3=3.863\times 10^{10}\text{ N/min}$,齿轮之间等效平均啮合刚度: $k_{1_2}=k_{1_2}=k_{1_3}=1.843\times 10^{10}\text{ N/min}$, $k_{2_1}=k_{2_2}=k_{2_3}=1.943\times 10^{10}\text{ N/min}$, $k_{4_1}=k_{4_2}=k_{4_3}=2.803\times 10^{10}\text{ N/min}$, $k_{5_1}=k_{5_2}=k_{5_3}=2.963\times 10^{10}\text{ N/min}$ 。在无误差或各齿轮误差均相同且为常值时,得到静均载系数为1,而各静态啮合力均为如图6所示。

由图6可知,第Ⅰ级各齿轮静态啮合力 $F_I=1.773\times 10^5\text{ N}$,第Ⅱ级各齿轮静态啮合力 $F_{II}=3.673\times 10^5\text{ N}$,系统具有很好静均载性能,系统分支静均载系数为1。由此可见同轴输入输出六分

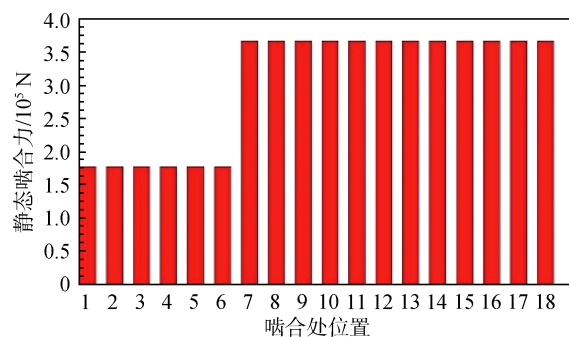


图6 无误差静态啮合力

Fig.6 Static meshing force without error

支系统构成功率闭环误差可相互抵消。当各个齿轮误差均存在且互不相同,各分支静均载系数变化如图7所示。

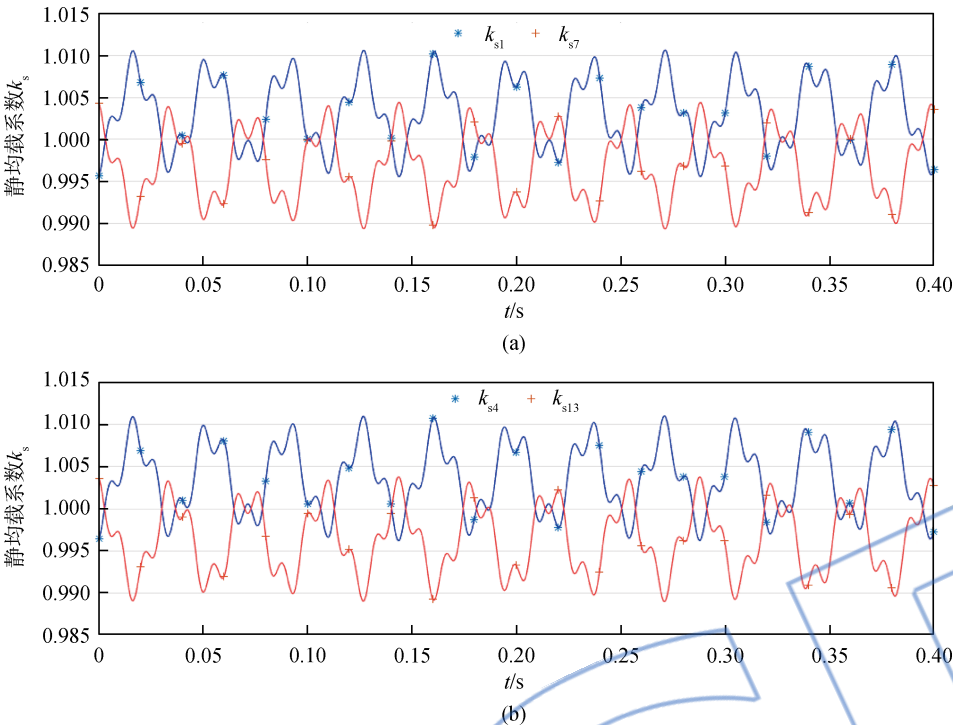


图7 同轴六分支人字齿轮传动系统静均载系数
Fig.7 Static load-sharing coefficient of coaxial six-branch herringbone gear transmission system

由图7可得,六分支人字齿轮传动系统静均载系数具有周期性,第Ⅰ级分支静均载系数 k_{s1} 和 k_{s4} 在1上波动,第Ⅱ级分支静均载系数 k_{s7} 和 k_{s13} 在1下波动。对于任何相啮合齿轮之间的静均载系数为时变量,而对于分支静均载系数为常数量,且分支静均载系数接近1则均载性能好。由式(29)计算得分支均载系数如表2所示。

表2 同轴六分支分支传动系统静均载系数	
Table 2 Static load-sharing coefficient of coaxial six-branch branch transmission system	
分支均载系数	数值
K_{s1}	0.955 6
K_{s2}	0.989 3
K_{s3}	0.996 2
K_{s4}	0.989 0

5.2 制造误差和安装误差对静均载性能影响

令系统安装误差为0 μm ,单独改变齿轮制造误差幅值为0~50 μm ,可得其对应的分支静均载系数如图8所示。令系统制造误差为0 μm ,单独改变齿轮安装误差幅值为0~50 μm ,可得其对应的分支静均载系数如图9所示。

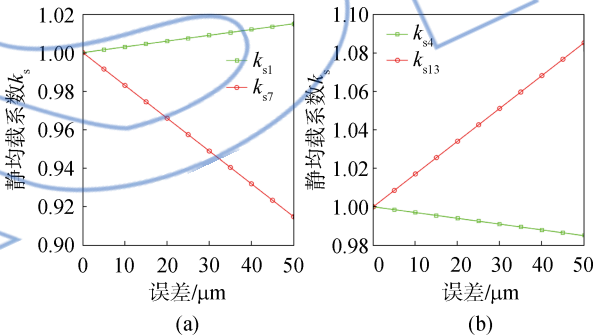


图8 制造误差对同轴六分支静均载性能影响
Fig.8 Influence of manufacturing error on static load-sharing performance of coaxial six branches

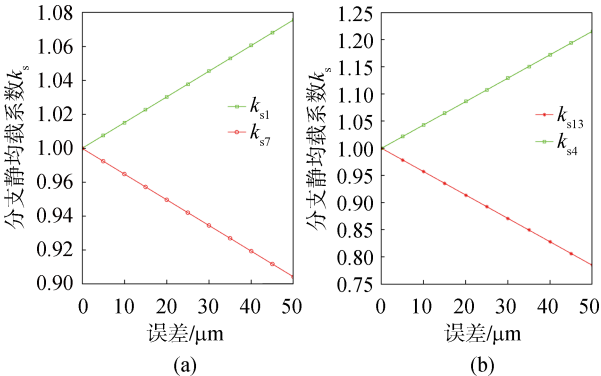


图9 安装误差对同轴六分支静均载性能影响
Fig.9 Influence of installation error on static load-sharing performance of coaxial six branches

由图8可知,随着制造误差增加, K_{s1} 和 K_{s13} 增加,而 K_{s4} 和 K_{s7} 减小,各分支静均载性能越来越差,且系统在每级中均载性能不同,第Ⅱ级均载性能受制造误差影响大。由图9可知,随着安装误差增加, K_{s1} 和 K_{s4} 增加,而 K_{s7} 和 K_{s13} 减小,各分支静均载性能越来越差,但每级均载性能变化相同。整体上看,制造误差比安装误差对系统均载性能影响更大。

5.3 两级误差对静均载性能影响

系统的两级误差指分扭级和并车级误差,其中分扭级误差指齿轮1、齿轮2和齿轮3($i=1,2,3$)之间误差;并车级误差指齿轮4、齿轮5($i=1,2,3,4,5,6$)和齿轮6之间误差。令系统并车级误差为0 μm 而改变分扭各齿轮之间误差,得其静均载系数如图10所示;令分扭级误差为0 μm 而改变并车级各齿轮之间误差,得其静均载系数如图11所示。

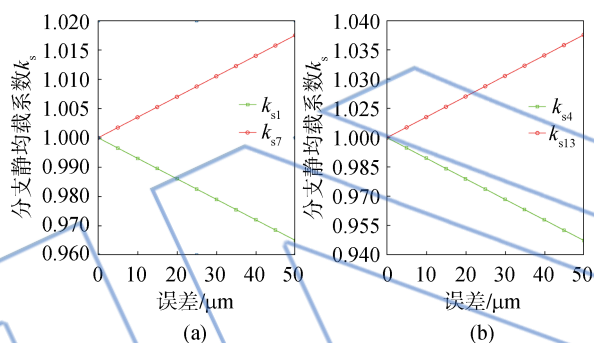


图10 分扭级误差对其静均载性能影响

Fig.10 Influence of torsion error on static load-sharing performance

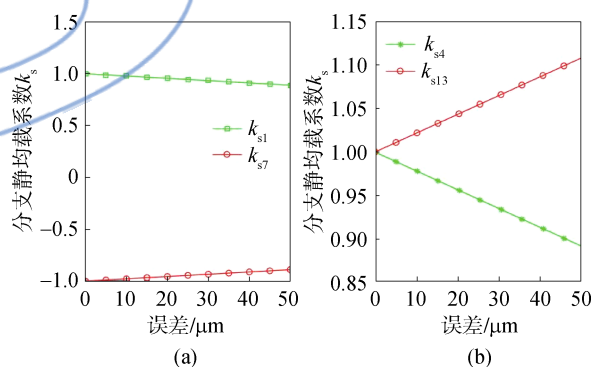


图11 并车级误差对其静均载性能影响

Fig.11 Influence of class error on static load-sharing performance

通过图10可知,随着分扭级误差增大, K_{s1} 和 K_{s4} 减小, K_{s7} 和 K_{s13} 增大,分扭级各静均载系数减少,而并车级增大,均载性能变坏。由图11可知,随着并车级误差增大, K_{s1} 和 K_{s4} 减小, K_{s7} 和 K_{s13} 增大,并车级出现静均载系数为负的现象。整体上看,无论是分扭级误差还是并车级误差变化,并车级静均载性能所受误差影响最大。

6 结 论

本文首先建立同轴六分支齿轮传动系统静力学模型和静力平衡方程,考虑均载特性主要影响因素误差,进行啮合传动误差分析,建立误差影响下系统变形协调方程,最后进行算例分析,得出如下结果:

1) 系统各齿轮误差为相同常数值时齿轮之间均载系数为1,同轴六分支系统误差可以相互抵消,第Ⅰ级各齿轮静态啮合力 $F_I=1.773\times 10^5$ N,第Ⅱ级各齿轮静态啮合力 $F_{II}=3.673\times 10^5$ N,系统会有很好静均载性能,因此齿轮传动系统采用相同误差等级的齿轮具有重要应用价值。

2) 在制造误差和安装误差存在情况下,对同轴六分支传动系统静均载性能的影响程度,制造误差比安装误差更敏感,提高齿轮加工精度更有利于齿轮系统静均载性能。制造和安装误差幅值都为50 μm 时,制造误差下静均载系数 K_{s1} 、 K_{s4} 、 K_{s7} 和 K_{s13} 分别为1.017 8、1.984 0、0.918 6、1.084 3;安装误差下静均载系数 K_{s1} 、 K_{s4} 、 K_{s7} 和 K_{s13} 分别为1.078 9、1.218 8、0.915 6、0.759 9。

3) 在两级传动系统,并车级比分扭级静均载性能受误差影响更大,可以将并车级输出构件设计成浮动构件,以减少误差影响。分扭和并车误差幅值都为50 μm 时,分扭误差下静均载系数 K_{s1} 、 K_{s4} 、 K_{s7} 和 K_{s13} 分别为0.965 5、0.947 5、1.017 5、1.037 5;并车误差下静均载系数 K_{s1} 、 K_{s4} 、 K_{s7} 和 K_{s13} 分别为0.889 8、-0.889 8、0.899 6、1.110 2。

4) 本文对同轴六分支齿轮传动系统静均载特性分析方法同样适用于其他同轴分支传动系统来进行静均载性能分析,且该方法即能考虑各种误差又能考虑两级之间扭转刚度对静均载性能影响,为功率分支传动系统均载分析提供科学依据。

参考文献:

- [1] KAHRAMAN A. Load sharing characteristics of planetary

- transmissions[J]. Mechanism and Machine Theory, 1994, 29(8):1151-1165.
- [2] KAHRAMAN A. Static load sharing characteristics of transmission planetary gear sets: model and experiment[J]. Society of Automotive Engineers, 1991, 108(6):1954-1963.
- [3] KRANTZ T L. A method to analyze and optimize the load sharing of split path transmissions[R]. NASA ARL - TR - 1066, 1996.
- [4] WHITE G. Design study of a split-torque helicopter transmission[J]. Journal of Aerospace Engineering, 1998, 212(2): 117-123.
- [5] YURIY G. Multi-path rotary wing aircraft gearbox: US7918146B2[P]. 2011-04-05.
- [6] WINK C H, SERPA A L. Performance assessment of solution methods for load distribution problem of gear teeth[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(1):80-94.
- [7] SINGH A. Load sharing behavior in epicyclic gears: physical explanation and generalized formulation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(3):511-530.
- [8] 陆俊华, 朱如鹏, 靳广虎. 行星传动动态均载特性分析[J]. 机械工程学报, 2009, 45(5):85-90.
- LU Junhua, ZHU Rupeng, JIN Guanghu. Analysis of dynamic load sharing behavior in planetary gearing[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(5):85-90. (in Chinese)
- [9] 朱增宝, 朱如鹏, 鲍和云, 等. 偏心与安装误差对封闭差动人字齿轮传动系统静力学均载特性的影响[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2011, 39(8):19-25.
- ZHU Zengbao, ZHU Rupeng, BAO Heyun, et al. Impacts of eccentric and installation errors on static load sharing behaviors of encased differential herringbone train[J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition), 2011, 39(8):19-25. (in Chinese)
- [10] 杜进辅, 方宗德, 王宝宾, 等. 基于变形协调的行星轮系均载特性研究[J]. 航空动力学报, 2012, 27(5):1166-1171.
- DU Jinfu, FANG Zongde, WANG Baobing, et al. Study on load sharing behavior of planetary gear train based on deformation compatibility[J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(5):1166-1171. (in Chinese)
- [11] 董皓, 方宗德, 杜进辅. 双路功率分流传动系统的静态均载特性分析[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2013, 45(9):94-99.
- DONG Hao, FANG Zongde, DU Jinfu. Static load sharing characteristics analysis for power split transmission system [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2013, 45(9): 94-99. (in Chinese)
- [12] 董皓, 方宗德, 王宝宾, 等. 基于变形协调和间隙浮动的双路功率分流系统均载特性分析[J]. 航空动力学报, 2013, 28(4):872-877.
- DONG Hao, FANG Zongde, WANG Baobing, et al. Load sharing characteristics analysis of power split system based on deflection compatibility and clearance floating[J]. Journal of Aerospace Power, 2013, 28(4):872-877. (in Chinese)
- [13] 桂永方, 朱如鹏, 扶碧波, 等. 扭转刚度对双输入圆柱齿轮分流传动系统动力学均载系数的影响[J]. 航空动力学报, 2014, 29(9):2264-2272.
- GUI Yongfang, ZHU Rupeng, FU Bibo, et al. Impact of torsional stiffness on dynamic load sharing coefficient of two-input cylindrical gear split-torque transmission system[J]. Journal of Aerospace Power, 2014, 29(9):2264-2272. (in Chinese)
- [14] 靳广虎, 任薇, 朱如鹏. 扭转刚度对功率分流传动系统均载特性的影响[J]. 航空动力学报, 2019, 34(11):2478-2489.
- JIN Guanghu, REN Wei, ZHU Rupeng. Influence of torsional stiffness on load sharing characteristics of power split transmission system[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(11):2478-2489. (in Chinese)
- [15] 袁茹, 王三民, 沈允文. 行星齿轮传动的功率分流动态均衡优化设计[J]. 航空动力学报, 2000, 15(4):410-418.
- YUAN Ru, WANG Sanmin, SHEN Yunwen. Dynamic optimum design of power shared out equally among the planetary gears[J]. Journal of Aerospace Power, 2000, 15(4):410-418. (in Chinese)
- [16] LIGATA H, KAHRAMAN A, SINGH A. An experimental study of the influence of manufacturing errors on the planetary gear stresses and planetary load sharing[J]. Journal of Mechanical Design, 2008, 130(4):137-139.
- [17] LITVIN F L. Gear geometry and applied Theory[M]. New Jersey, US: PTR (Professional Technical Reference) Prentice Hall, 1994:258-280.
- [18] 袁擎宇, 朱如鹏, 朱自冰, 等. 两级星型齿轮传动静力学均载分析[J]. 机械科学与技术, 2004, 23(7):789-792.
- YUAN Qingyu, ZHU Rupeng, ZHU Zibing, et al. Analysis of static load sharing in a 2-stage star gearing system[J]. Mechanical Science and Technology, 2004, 23(7):789-792. (in Chinese)

(编辑:叶青、张雪)